4. Séries trigonométriques de Fourier et espaces L^2

Exercice 1. Soient les fonctions f et g d'une variable réelle définies par

$$f(x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = xe^{ix}.$$

Sont-elles de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$? Si oui, calculer leur norme et leur produit scalaire dans l'espace $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$.

Exercice 2. Vérifier sous quelle(s) condition(s) les fonctions f et g définies par

$$f(x) = e^{-\alpha x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sin(\theta x)e^{-\beta x}$$

(où $\alpha, \beta > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) sont orthogonales dans l'espace $\mathrm{L}^2([0, +\infty[)$.

Exercice 3. Montrer que les fonctions

$$f_m : x \in [a, b] \mapsto \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2i\pi mx}{b-a}} \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

constituent une suite orthonormée dans l'espace $\mathrm{L}^2([a, b])$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Exercice 4. (a) Développer en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ la fonction f donnée par $f(x) = e^x$.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^2+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2+1}.$$

Exercice 5. Soit f la fonction d'une variable réelle définie par $f : x \mapsto \sin(x)$.

(a) Si possible, la développer en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0, \pi])$ et dans $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$

Exercice 6. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f de $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}, \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Exercice 7. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x|.$$

(a) Si possible, développer f en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$. Simplifier au maximum la solution finale et l'exprimer uniquement au moyen de fonctions sinus et cosinus.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}, \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4}.$$